



タイトル	数学×思考=ざっくりと いかにして問題をとくか
著者	竹内 薫 (たけうち かおる)
出版社	丸善出版
発売日	2014年4月30日
ページ数	170ページ

本書は、1954年に初版を刊行してから半世紀以上、数学的思考法の指南書として読み継がれてきたG・ポリアの不朽の名著「いかにして問題をとくか」(いか問)の竹内薫版です。

G・ポリアの本は筆者も学生時代に柿内賢信の訳で読んだことがある。本書の興味のあるところをざっと一通り目を通してから、最初のページに戻って読み始めた。ところが、左ページの左下隅の絵が気になっていた。

「ソファ問題」では、ソファを立てたり斜めに持ち上げたりしない。数学的には二次元平面の幾何学として考える。運び入れる家の廊下は、途中で90度に折れ曲がっているのでソファの形状にはかなりの制限が付くという問題だ。

98頁の仮説5: ハマースレー型のソファの例を見て、「パラパラ漫画」だということに気付いた。さっそく本をパラパラと捲ってみると、ハマースレー型のソファが難なく廊下を直角に曲がる様子を動画で見ることが出来るという仕組みであった。なるほど、面白い!

さっそく、目次を見てみよう。

はじめに

1. オーダー(規模)を把握しよう — フェルミ推定でざっくりと
2. 地球の「皮」はどれくらい厚いか考えてみよう — スケール感でざっくりと
3. あらゆる予測に活用しよう — 最小二乗法でざっくりと
4. まず迷ったら数値的に考えてみよう — モンテカルロ法でざっくりと
5. 枠の「外」に出て発想の殻を打ち破ってみよう — ソファ問題をざっくりと
6. もっと一般化して考えてみよう — モンティ・ホール問題をざっくりと

7. 集められたデータの本質を見抜いてみよう —— 統計的手法でざっくりと
8. ざっくり思考の落とし穴：信念体系を分析してみよう

—— 脱：非論理的思考でざっくりと

おわりに

どこを読んでも面白いが、ここでは三つばかり紹介しておこう。

まず、一つ目は「フェルミの推定問題」だ。フェルミがシカゴ大学の学生に課した問題、「シカゴにはピアノの調教師が何人いるか」は有名だ。フェルミが非常に重視したのが「オーダー」(Order Estimate) の考え方だ。竹内流に言えば「ざっくりと桁を求める」である。

この問題は、「Wikipedia」にも記載されているので、ここでは別の問題を見ておこう。

「肉眼で星の数を求めよ」という問題である。肉眼で、一体どれくらいの星の数が見えるかという問題だ。この問題の手がかりは何だろうというのが第一のヒントだ。手掛かりは「星座の数」だ。現在、全部で 88 個の星座がある（ざっくり 100 個：つまり、nealy equal 100 個）。次は、「一つの星座の中に、目視できる星は幾つあるか」だ。オリオン座なら、我々が肉眼で良く見える星は 7 個だ。しかし実際に数えてみると、オリオン座やさそり座では 100 を超える星が肉眼で実測できるそうだ。カシオペアであれば、良く見える星の数は 5 個だが、実際には 94 個の星が肉眼で実測されているという。

すると、一つの星座に対し、ざっくりと 100 個の星があると仮定できるので、星の総数は 88 星座×100 個/星座=8800 個になる。北半球では、単純にその半分だとすれば、4400 個が肉眼で見えるという計算になる。

さて、この数、どれくらい合っているのだろうか。実は、ものすごく星がよく見える場所で、肉眼で 6 等星（かろうじて肉眼で見える一番暗い星）まで見えるとした場合には、全天で 8600 個の星が実測されている。そうすると、北半球では単純にその半分の 4300 個の星が見えるということになって、「フェルミ推定」の手法で概算した数字が、実測値とほぼ一致していることが理解できる。仮に星座数をざっくり 100 個と大きく見積もっても 5000 個であり、Order Estimate としては上出来ということになる。……。

二つ目は、次元解析とスケーリングだ。

テレビで、『カブトムシが竿を引っ張っていた。すると解説するアナウンサーが、「体重 10 グラムのカブトムシが重さ 200 グラムの竿を引っ張っているということは、人間で言えば、体重 60 キロの人が重さ 1.2 トンの物体を引っ張っているのと同じ!』と非科学的なことを言っていた。この議論はどこが間違っているのだろうか？

人間とカブトムシの体重の違いは、ざっくりと 6000 倍である。さて、ここで考えなくてはならないのは、体重が 6000 倍になると、力も 6000 倍になるのだろうか？これを「次元解析」の考えを援用して考えてみようというわけである。

重さはキログラム」という単位を持っている。時間は秒という単位を持っている。加速

度は「メートル毎秒毎秒」だから、長さを時間で2回割った次元を持っている。

すなわち、次元（言い換えると単位）だけに注目して物理の方程式を考える手法を「次元解析」という。

さて、カブトムシと人間が出す「力」はどういう次元を持っているのだろうか。学校で $F=ma$ （ニュートンの運動の第二法則）と教わった。 F は力、 m は重さ、 a は加速度。重さは重さの単位を持っていて、加速度は長さを時間で2回割った単位を持っているので力は重さ×長さ÷時間÷時間となる。

体重は6000倍違う。身長もカブトムシが8センチ、人間を160センチとすれば、20倍違う。

あとは時間だ。いわゆる体内時計がどうなっているかである。生物の教科書によれば、時間はざっくりと体重の四分の一乗に比例するとある。つまり時間は重さの四分の一乗。さらに、体重は身長の三乗に比例するので、それらの数字を全て力＝重さ×長さ÷時間÷時間という式に代入すれば、最終的には重さだけの式になる。その値を計算してみると、力は重さの六分の五乗になる。

さて、数値をこの式に数値を代入してみよう。人間はカブトムシの体重の6000倍。する

と力は6000倍ではなく、6000の六分の五乗（ $6000^{\frac{5}{6}}$ ）、つまり1400倍しか出ない。カブトムシが200グラムの竿を引っ張ることが出来るのなら、人間は、その1400倍、すなわち、280キロの重さを引っ張れば同格ということになる！このような考え方をスケーリングという。

注意すべきは、力には加速度が入っているので、時間も考慮しなければならない。

時間のスケーリングを忘れてしまうと、最初のアナウンサーのように間違った結論になるのである



「時間はざっくりと体重の四分の一乗に比例する」とは。

本川達雄著の「ゾウの時間ネズミの時間」にマクマホンの説明がある。これ見てみよう。

$$\text{力} = \text{質量} \times \text{加速度} \cdots \textcircled{1}$$

ところで

$$\text{質量} \propto \text{長さ} \times \text{断面積}$$

$$\text{加速度} \propto \text{長さ} / (\text{時間})^2$$

これらを式①に代入すれば

$$\text{力} \propto \text{長さ} \times \text{断面積} \times \text{長さ} / (\text{時間})^2$$

ゆえに、単位面積当たりの力（応力）は上式の両辺を断面積で割ればよい。

$$\text{力} / \text{断面積} \propto (\text{長さ})^2 / (\text{時間})^2 \cdots \textcircled{2}$$

筋肉の出す単位断面積あたりの力は一定なので、式②の左辺は一定となるから

$$\text{時間} \propto \text{長さ}$$

弾性相似なら、長さ \propto (体重)^{1/4}なので、

時間 \propto 体重^{1/4}

となる。

三つ目は、ベイズ確率です。学校ではあまり習わないが、現実社会で応用されている確率計算の多くは、ベイズ確率だと言われている。

刻々と移り変わる「情報量」により、確率計算が変わるのが、現実世界の確率である。これは、イギリスの牧師兼数学者が研究した問題なので、「ベイズ確率」と呼ぶ。その人間が主観的に知っている情報の量により確率計算結果が変わってくるので「主観確率」の一種だといえる。

現代で「ベイズ確率」が生かされている典型が、スパムメール・フィルターだ。皆さんご存知の、携帯やパソコンの迷惑メールを「迷惑メールフォルダー」に自動的に振り分けしてくれるソフトのことだ。

普段はあまり意識しないが、このソフトは毎日のように新手の迷惑メールの情報を更新し、メールの中に特殊なキーワードがないか、差出人に怪しい特徴がないかなど、最新情報を駆使して確率計算をし、迷惑メールを選別してくれる。

その情報とは何かというと、たとえば、キリル文字（スラブ文字）の入っているものは迷惑メールの確率が高いとか、ある特定のワードが入っているものは迷惑メールの確率が高いというのは、日々統計を取っていると出て来るわけだ。それによって、フィルターの確率の計算を日々更新する。つまり、情報がアップデートされることにより、よりスパムメールの判定精度が高くなっていく。等々、詳細は本書で！

本書は、「難しい問題」ほど「ざっくり考える」が勝ち！「いかにして問題をとくか」（いか問）の竹内流・問題解決思考法である。

難問に直面したからと言って、即座に諦めることは全くありません。そういう時こそ、発想を転換して、まずは「ざっくり」（Nearly Equal という意味らしい）と考えてみると、以外に道が開けるものだ。本書では、G・ポリアの発想法にヒントを得て、どんな読者でもよく理解できるよう、平易な語り口で日常生活や仕事上の問題を解決する方法を伝授してくれる。

2014. 6. 23