



タイトル	「数学の遺伝子」: 副題 - 5本の指から始まる壮大な物語
著者	小島寛之
出版社	日本実業出版
発売日	2003年6月5日
ページ数	278p

まえがきに、「この本は、あなたを数や数学の友達にしてさしあげる本です。数は怖いものでも、難解なもの、無用の長物でもないのです。むしろ数は、この世界を豊かでファンタスティックなものに見せてくれるパノラマなんです。」とあります。

本書は大きく4章で構成されており、

## 第1章

- |                |                |
|----------------|----------------|
| 1 10進法の呪縛      | 2 E.T.は8進法を使う？ |
| 3 コンピュータと悪魔の頭脳 | 4 素数は、数の宝石     |
| 5 素数とコンピュータ    | 6 江戸時代の年齢当てクイズ |
| 7 数理暗号の時代      | 8 RSA暗号の仕組み    |

## 第2章

- |                     |                           |
|---------------------|---------------------------|
| 1 分数は難しい？           | 2 分数の足し算は、どうして自然じゃないんだろうか |
| 3 互除法で最大公約数が求まる     | 4 0.4を2進数で表わされるか？         |
| 5 「分数＝割合」は不確実性を解く鍵  | 6 確率が、ミクロの世界の不思議を暴く       |
| 7 ニュースキャスターのパラドックス  | 8 「火星に生物がいる確率」は限りなく1に近い？  |
| 9 賭博師メレと天才パスカル「の出会い | 10 条件付き確率は主観的             |
| 11 ベイズ「牧師が編み出した逆確率  |                           |

## 第3章

- |                         |                        |
|-------------------------|------------------------|
| 1 平方根には美が潜んでいる          | 2 ひもとコップと時計で作る平方根      |
| 3 最適の貯金と平方根             | 4 歩いても歩いても前に進まない酔っ払い歩き |
| 5 難問「ゼータ」の計算に挑んだオイラーの奮闘 | 6 オイラー数と利子計算           |

- |                     |                   |
|---------------------|-------------------|
| 7 合コンの成功確率          | 8 馬に蹴られて死んだ兵士の話   |
| 9 誤差に潜むすばらしい関数      | 10 株価はブラウン運動する？   |
| 11 ジュラシック・パークのカオス理論 | 12 マイマイガの発生のメカニズム |
| 13 カオスとランダムウォーク     | 14 カオスをつかさどるのは無理数 |

## 第4章

- |                         |                        |
|-------------------------|------------------------|
| 1 虚数が誕生したのは、数学が格闘技だった時代 | 2 現実にはフィクションが必要なのだ     |
| 3 複素数のビジュアル化は回転拡大       | 4 方程式を解くことで、正多角形が描ける   |
| 5 ガウスの歴史に残る大発見          | 6 フェルマーの大定理が生んだ数の理想郷   |
| 7 ミクロの物質の不思議な振る舞い       | 8 ミクロ世界の確率は、複素数で記述される  |
| 9 量子コンピュータは夢のテクノロジー     | 10 量子コンピュータは RSA 暗号を破る |

このようにグループに分けられており、何処から読んでも良いように構成されています。多くの人は、自分が読みたいテーマを持っていると思いますので、ここでは3章12節の「マイマイガの発生メカニズム」についてマイクロソフトの「エクセル」を使って紹介してみましょう。



マイマイガ(め) 昆虫(小学館図鑑より)

「マイマイガ」とはどんな蛾なのでしょうか。幼虫は典型的なケムシで、背面には目立つ二列の点が並んでいます。この点の色は個体にもよりますが頭寄りの5対のみ青で、それ以降の6対は赤くなるものが多いようです。

成長すると体長は60mmほどになり、糸を吐いて木からぶら下がっている様子から、別名「ブランコケムシ」と呼ばれており、風に吹かれてかなり広域を移動することが知られています。

オスは活動的で、日中は森の中を活発に(目まぐるしく)飛び回ります。和名の「マイマイガ」はオスのこの性質に由来していると言われています。これとは対照的に、メスは木の幹などに止まってじっとしており、ほとんど飛ぶことはありません。オスは「茶褐色」、メスは「白色」で、大きさも異なりオスは体長20mmから50mm程度なのに対して、メスは50mmから大きな個体では100mmほどにもなります。

第二次大戦後、ニューヨーク州のロングアイランドでは、住民が国と州を相手どってDDTの空中散布に反対して訴訟を起こしました。散布の目的は樹木の害虫マイマイガの駆除でしたが、樹木のない市街地、牧場にまで広範囲に散布したため、家畜が具合悪くなったり、養魚場の魚が死ぬといった被害が出ていました。この訴えは最終的には、薬剤散布と環境汚染との関係を証明する科学的根拠を住民側が提出できなかったのを理由に却下されます。この事件が後のレイチェル・カーソンの「沈黙の春」へと繋がっていきます。

さて、文章の一部を少し紹介しておきましょう。「・・・カオス現象が劇的に単純な形で見つけられたのは、1970年代のことである。蛾の一種であるマイマイガの発生をシミュレートするロジスティック関数というのがある。現在の個体数が  $x$  のときの次世代の個体数を  $f(x)$  とするとき、次のような式で計算すると、現実をよく模倣できることが知られているのである。

$$f(x) = \lambda x(1-x) \quad (\text{ただし、} 0 \leq x \leq 1) \quad (1)$$

これは、蛾の繁殖を単純化したモデルである。いったん  $\lambda$  倍の  $\lambda x$  だけ幼虫が生まれるが、多くなりすぎると生存環境が悪化することで、 $(1-x)$  だけの割合しか生き延びられなくなり、結局次世代の個体数は  $\lambda x(1-x)$  となる」とあります。

このあと、数値計算が続きますが、まずここまでのところを理解しておきましょう。

式(1)は、「ある数  $x$  がある。これを簡単な式に代入し、コンピュータで処理する。出された解を、再び  $x$  として方程式に代入する。こうした演算を繰り返せば、万人の前にカオスが現れる」という情報が含まれるというのです。

式(1)を見ると、何の変哲もない二次式です。この式に何が隠されているのでしょうか。カオスとは一体何者でしょうか。

まず、最初の疑問点です。

1. 式(1)で、蝶の食物連鎖でも述べたような仕組みを表すことができるのでしょうか。
2. 式(1)の  $x$  の範囲のように、単純化できるのでしょうか。
3. 式(1)の  $\lambda$  にはどんな意味があるのでしょうか。

の三点です。

式(1)を眺めていると、なかなか良く出来ていることに気がつきました。

まず、1. については以下の通りです。

この式は  $x$  が 0.5 を境に増えたり、減ったりしています。しかも  $x$  の範囲は 0 と 1 の間だけです。さらに式を眺めていると、「増えすぎたら、減らしなさい。減りすぎたら、増やしなさい」というフィードバック機構であることがわかります。

つまり、 $f(x) = \lambda x$  であれば、子供の数は親の数に比例するわけですから、 $\lambda$  は子供の数は親の何倍になるか、つまり繁殖力を示しています。ところが、親の数が多いと、餌の植物を食べつく

してしまうので子供の代では数が減ります。したがって、食糧の量は $1-x$  で表わし、子供の代では $f(x) = \lambda x(1-x)$  で表わされるというわけです。こんな風に言ってしまうと、じゃあ子供と親の餌の奪い合いではないかと誤解されそうですが、 $1-x$  の部分は捕食される項であると考えたほうが良いかも知れません。

つまり、マイマイガが増えすぎると、食糧不足や病気などでフィードバック機構が働いて、その数を減らす方向に、また減りすぎるとまたフィードバック機構が、今度は増やす方向働くというわけです。うまく考えてますね。

2. は、簡単ですね。たとえば、変数範囲が  $a_1 \leq x \leq a_2$  であれば、 $X = (x - a_1) / (a_2 - a_1)$  と置き換えれば、よいのです。このように置き換えることにより、 $X$ は $0 \leq X \leq 1$ になり問題解決です。したがって、式(1)のまま議論が進められますね。

3. はどうでしょうか、

式(1)を変形すると、以下の通りです。

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (1')$$

$x_n$  はマイマイガの分布、添え字  $n$  は次々に現れる世代を表し、 $n$  番目の世代に親が  $\lambda$  匹の卵を産みます。次の世代の分布は、 $\lambda x_n$  になります。式中には  $(1-x_n)$  という因子が掛けられています。これは分布密度を適正な値に保つフィードバックを表しています。

後残ったのは、「カオスとは何か」と「数値計算」のみです。まず何はともあれ、カオスの存在を知るために、式(1')の数値実験をやってみましょう。

式(1')は、逐次ループなので計算は簡単です。BASIC、VISUAL BASIC、FORTRAN などどれでも計算可能ですが、今回はプログラミングの不要なExcelを使ってみましょう。Excelでの計算結果の一例を以下に示します。

Microsoft Excel - カオス理論2.xls

ファイル(F) 編集(E) 表示(V) 挿入(I) 書式(O) ツール(T) データ(D) ウィンドウ(W) ヘルプ(H)

MS Pゴシック 11 B I U

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		マイマイガの発生メカニズム							
3									
4		No.	$\lambda = 2$	$\lambda = 1 + \sqrt{2}$	$\lambda = 4$	$\lambda = 4$			
5		1	0.40000	0.40000	0.40000	0.40001			
6		2	0.48000	0.77666	0.96000	0.96001			
7		3	0.49920	0.56133	0.15360	0.15357			
8		4	0.50000	0.79684	0.52008	0.51995			
9		5	0.50000	0.52387	0.99840	0.99841			
10		6	0.50000	0.80717	0.00641	0.00636			
11		7	0.50000	0.50368	0.02547	0.02526			
12		8	0.50000	0.80897	0.09927	0.09849			
13		9	0.50000	0.50009	0.35767	0.35517			
14		10	0.50000	0.80902	0.91897	0.91609			
15		11	0.50000	0.50000	0.29786	0.30746			
16		12	0.50000	0.80902	0.83656	0.85172			
17		13	0.50000	0.50000	0.54692	0.50518			
18		14	0.50000	0.80902	0.99120	0.99989			
19		15	0.50000	0.50000	0.03491	0.00043			
20		16	0.50000	0.80902	0.13476	0.00172			
21		17	0.50000	0.50000	0.46640	0.00686			
22		18	0.50000	0.80902	0.99548	0.02724			

数値だけでは、はっきり傾向が掴めないなので、 $\lambda$  の値と初期値を変えて計算し、これらを図で示しておきましょう。ただし、 $\lambda$  は1~4まで、初期値を色々変えて様子を見てみましょう。

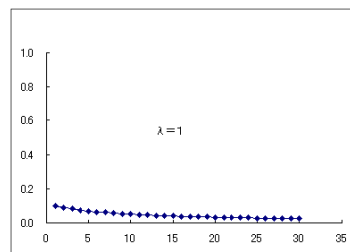


図1.  $\lambda$  の値による変化

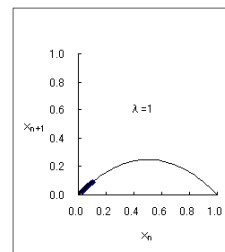


図2.  $x_n$  と  $x_{n+1}$  との関係

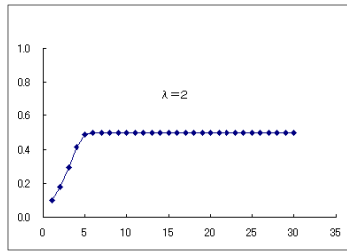


図3.  $\lambda$  の値による変化

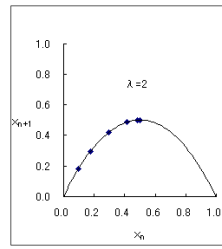


図4.  $x_n$  と  $x_{n+1}$  との関係

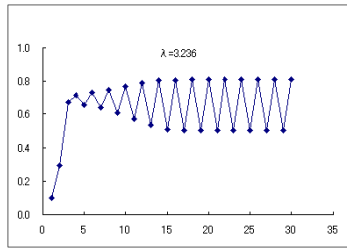


図5.  $\lambda$  の値による変化

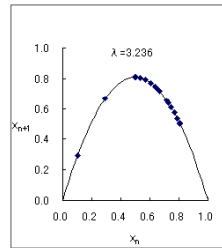


図6.  $x_n$  と  $x_{n+1}$  との関係

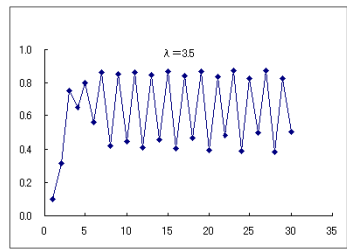


図7.  $\lambda$  の値による変化

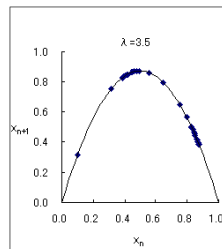


図8.  $x_n$  と  $x_{n+1}$  との関係

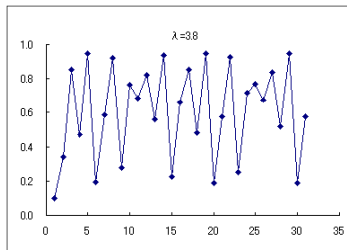


図9.  $\lambda$  の値による変化

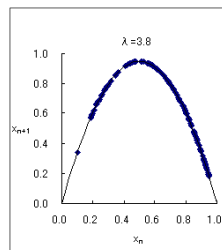


図10.  $x_n$  と  $x_{n+1}$  との関係

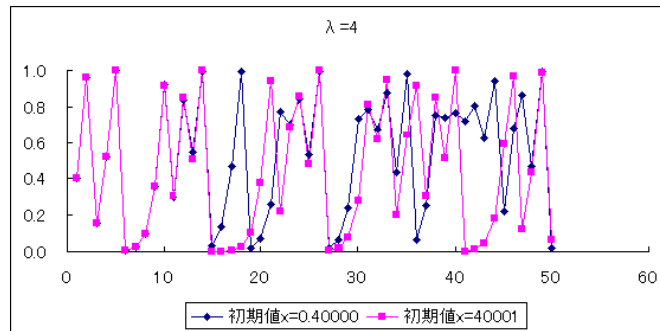


図 11.  $\lambda$  の値による変化

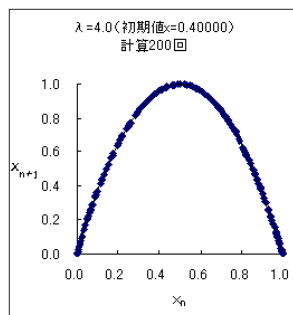


図 12.  $x_n$  と  $x_{n+1}$  との関係

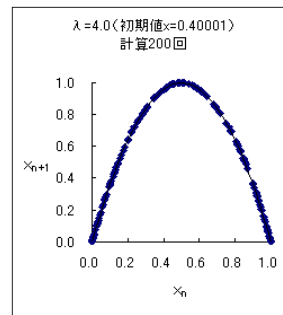


図 13.  $x_n$  と  $x_{n+1}$  との関係

これらを、大雑把にまとめると、

1.  $\lambda$  が1より小さい場合、分布はゼロへと減少していきます。
2.  $\lambda$  が1より大きく、3より小さい場合は、分布は一定値になります。
3.  $\lambda$  が3を超えると、密度が大きくなれば  $x$  は減少し、密度が小さくなれば  $x$  は増加します。
4.  $\lambda$  がさらに大きくなると、分布状態が複雑に変動し、さらに大きくなると、カオス状態になります。

これらを個別に見てみましょう。

たとえば、図3. の  $\lambda=2$  の場合は、 $x$  は初期値から直ぐにある一定の値 ( $x=0.5$ ) 近づきます。いったんこの値になれば、そのままこの値に留まります。フィードバックが効きすぎて、 $x_n$  が収束するならば、 $x_n = x_{n+1}$  の解になってはずですから、 $x = 2x(1-x)$  したがって、 $x(2x-1) = 0$  となります。 $x = 0$  は解ではありませんから  $x = 0.5$  となり予想通りの解が得られます。

図5. では、 $\lambda$  の値の  $1 + \sqrt{5} = 3.236$  は無作為に取った数値ではありません。図からも判るように、最初多少の振れはありますが、ついには二つの数値が交互に出現しています。カオス理論では、これらの点をアトラクター(つまり吸引子)と呼んでいます。

これらはフィードバックが強い例です。この図は、増えすぎたマイマイガが、次の時期に死滅することによって減少します。しかし、少なくなりすぎると、次の時期にはまた増える。といったことを繰

り返すというように、自然の姿を模写しているというわけです。ただ、モデルとしては面白いのですが、規則性があるということから、自然界で見られる実際の状況とは異なっています。

図 11. の  $\lambda=4$  の場合はどうでしょう。今度は前の例と違って、一定のパターンを持っていません。計算に間違いがあったのではないかと最初は疑いましたが、間違いありません。出てくる値同士に、全く脈絡がないような振舞いです。何時まで経っても同じようなパターンが現れてきません。50 項以上を続けて計算しましたが、結果はずっとこんな調子で続きます。頻度分布のところでは 200 項まで計算していますので参考にしてください。

モデルがこれほど簡単なのに、結果は全く複雑な振舞いを見せています。これこそカオスに他ならないわけです。以上の例は、フィードバックに強弱を与えて、その挙動を見たわけですが、 $\lambda$  の値によって結果が大きく変わることがわかります。

図 11. には初期値を変えた場合どうなるかを、フィードバックが弱い  $\lambda=4$  について検討したものです。初期値は  $x=4.00000$  と  $x=4.0001$  の場合の比較です。まず、この計算の結果はほとんど変わらないだろうと考えられましたが、結果は予想に反して、図でも見て判る通り、両者の差異はどんどん大きくなっていきます。この予測できない事態が、カオスの特徴なのです。

図 1. ~ 図 13. には、左に時系列、右にピーク値がとった 2 次曲線上の点を表示していますが、これを見方を変えて横軸前方から眺めてみましょう。すなわち、ピーク値の度数分布を求めてみようというわけです(図 14. ~ 図 17.)。このように見る位置を変えることによって、様子がもっと良く判ってきます。なお、以下の頻度分布は、計算回数を 200 回に増やして求めたものです。なお、横軸はグラフを小さくすると横軸の値を書くのが難しいため、1 から 1.0 までの数値は、1(0.00~0.10)、2(0.11~0.20)、3(0.21~0.30)、...、10(0.91~1.00)のようになっています(図 18. 参照)。

$\lambda=4$  の場合(図 16.、図 17.)のように、フィードバックが弱い系では、フィードバックがかかり難く、ピーク値が 0 や 1 を取る頻度が上がりますが、しかし、これを除けば全体的にはホワイトノイズのように、均等に分布しています。つまり、全くランダムな分布となります。

実際のマイマイガの経年変化も、フィールドで経験するように年毎に大きく異なります。私がよく訪れるフィールドに池河内湿原があります。ここの昆虫達を長年追いかけていますが、ある種の蝶や蛾の生息数は、年とともに大きく変化します。

最近の例では、3 年ほど前にクスサンの幼虫が異常繁殖したことがありました。それは大変な量で、舗装道路を歩いていても木の上からぼたぼたと落ちてくるし、舗装道路も幼虫の絨毯のようで、歩くのが大変なくらいです。車で通る場合は轆いて通らないと無理なくらいの数です。

また、2005 年にはキアシドクガの成虫が山の樹木を白い点で埋め尽くすほど大量発生し、池河内で農業を営んでいる集落の人たちが「今年は蝶が異常に多いね」と勘違いした位です。

私達虫を追いかけている者の間でこのような情報を共有することはあまりありませんが、上記ク



スサンの幼虫の大量発生やキアシドクガの成虫の異常発生を見ると、これはまさに「カオスだなあ」と納得してしまいます。

皆さんも、 $3.5 \leq \lambda \leq 3.9$  あたりの計算を自分でやってみて下さい。結構面白い結果が出てきます。これらの結果を見ていると、自然界は、フィードバックが比較的弱い系に近いということがよく判ります。

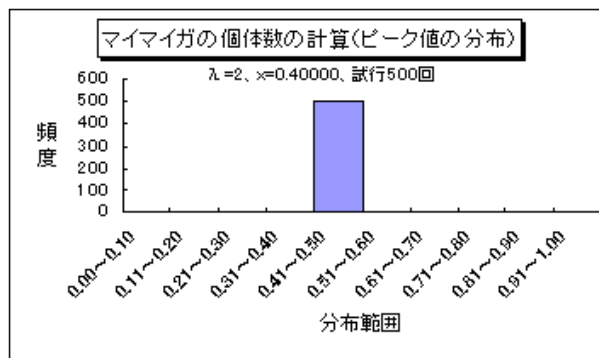


図 14. ピーク値の分布(フィードバックの強い  $\lambda=2$ 、初期値は  $x=0.40000$ )

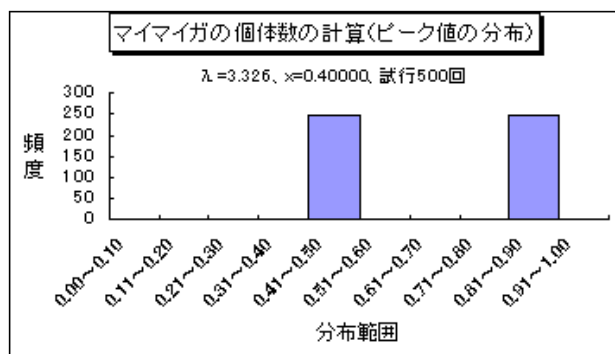


図 15. ピーク値の分布(フィードバックの強い  $\lambda=3.326$ 、初期値  $x=0.40000$ )

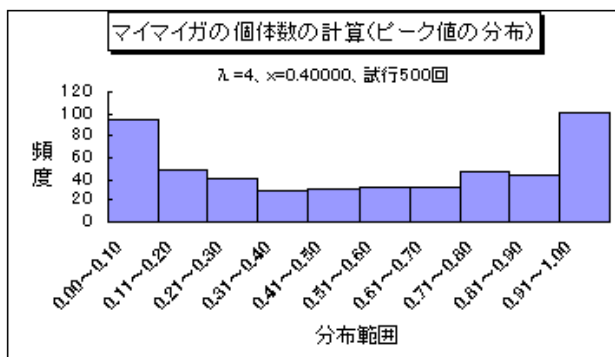


図 16. ピーク値の分布(フィードバックの弱い  $\lambda=4$ 、初期値  $x=0.40000$ )

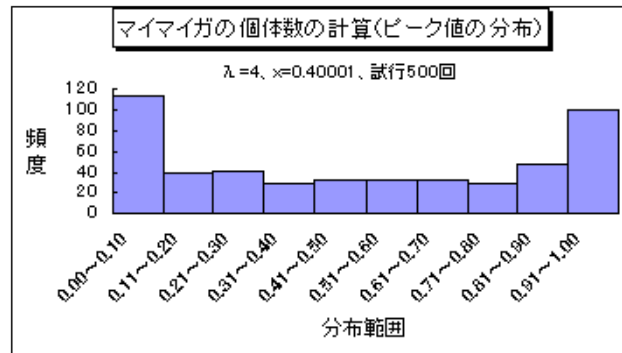


図 17. ピーク値の分布(フィードバックの弱い  $\lambda=4$ 、初期値  $x=0.40001$ )

さて、以上の例で面白いなと思ったのは、一般に、数学というのは論理的に得られるものであって、実験結果として得られるものではないと私たちは思っていたことです。ところが最近はそのようではなくなってきたようです。

コンピュータは、数学の実験的側面を大きく発展させているようです。特に、上の例のように、コンピュータは逐次計算が得意で、何百万～何千万回という繰り返し計算など朝飯前です。これによって、私たちは、予測もしていなかったような面白い結果に遭遇するという僥倖にめぐり合えることが出来るかも知れません。

ラプラスは 19 世紀初頭、ニュートンが描いた宇宙の成り立ちを信じて、いかなる粒子も、初期値さえ判れば、その挙動の全てを正確に予言することが出来ると主張しました。このような能力を持った悪魔を「ラプラスの悪魔」と呼びましたが、統計力学とエントロピーの誕生で個々の分子の運動を初期値までさかのぼってたどることが出来なくなりました。

また、運動の厳密な予測も量子力学の不確定性原理によって打ち砕かれました。真理はただ一つなのではなく、総体が持つ多様な断面の一つであるのかも知れません。

計算で実際に現れるものとして、初期値設定の数値をちょっと変えるだけで、気象図の姿が途中から大きくずれてしまう時があります。僅かな違いしかないような温度・気圧・風向から計算をスタートさせた二つの気象が、ちょうど図 11. でも見られたように、あまり長い時間を経ないうちに、劇的に大きく異なる状態に分かれてしまうという計算結果が得られています。初期値のほんの僅かな違いが、大きな結果の違いを生むというのです。これには、「バタフライ効果」という渾名がついていて、「北京で蝶が羽ばたくと、ニューヨークで嵐が起こる」というたとえ話にまでなっています。

図 11. などを眺めていると、人の人生を表わしているようで、複雑な気持ちになります。

ただ、時々「今年は何時もの年よりギフチョウが少ないな」などとひとり言をいっている自分を発見することがありますが、図 11. のような図に出くわすと「これだ！」と合点がいったように思うこともありますが、ここで示されたマイマイガの生態モデルなどは、実験的な根拠が薄いモデルなので、それが表わす現実に対しては玩具といえるほどの代物であることも確かです。

極めて複雑な状況を予測するのに、私たちが信奉する還元論には限界があることが判っています。コンピュータの大容量化がカオス理論の活躍の場を益々広げています。

宇宙は物質現象だけでは完結しないのでしょうか。カオスは自然界における秩序をつかさどっているのでしょうか。また、カオスは生物の分野にも新しい生命を吹き込んでくれるのでしょうか。

原理的に数値化に馴染むとは限らない現象にまでカオスを無批判に、楽天的に適用するのは、注意が必要ですが、何か途方もないことが起こっているのでしょうか。なんだかワクワクしてきます。

2004. 3. 14

---