マンホールのふたはなぜ丸い

お寺の屋根

タイトル	「マンホールのふたはなぜ丸い」－暮らしの中の数学－
著者	中村義作
出版社	日経ビジネス人文庫
発売日	2004 年 6 月
ページ数	217p

本書を読んでいると「お寺の屋根はサイクロイド曲線で、最速落下曲線に近い」という面白い話に出くわしました。神社の写真をよく見てみると「なるほど」と頷かせるものがあります。

写真 1. は敦賀市にある気比神宮ですが、屋根のつくりをよく見てください。綺麗な曲線を描いています。私達が住んでいる家の屋根の傾斜はほとんど直線ですが、神社や寺の屋根の傾斜は美しい曲線を描いています。屋根にこのような曲線を使うことによって屋根を一層美しく見せているわけですが、昔の匠は素晴らしい曲線を考え出したものだと感心しますね。

さて、屋根には大雑把に切妻型、寄棟型、入母屋型などに分けられます。切妻型では芝増上寺大殿、寄棟型では東大寺念仏堂、入母屋型では東大寺俊乗堂などに見られ、切妻型は雨水を二方向へ、寄棟型や入母屋型は雨水を四方向に流すなどの特徴があります。

また、寄棟型や入母屋型では、屋根が反り返っている（写真 2.）のが見られます。でも、あの曲線は屋根を美しく見せるためだけのものなのでしょうか。ここでは、「屋根が反り返っている理由」について考えてみましょう。

写真 1.　敦賀市の気比神宮

屋根の本来の目的は、雨露をしのぐところにあります。公団アパートのような平らな屋根では雨がたまって困りますが、あの屋根もよく見ると勾配がちゃんとついていて水はけをよくしていることが判ります。

直線の屋根では屋根の上のほうでは流れが緩やかですが、下のほうでは勢いが付いてきます。一方、神社や寺の屋根の勾配だと屋根の上のほうで流れに勢いをつけて、屋根を一気に流れ落ちるという仕組みで、雨が屋根の上にいる時間が最小になるように出来ています。

この曲線は雨が最も速く流れ落ちる形として知られており、数学の世界では「最速降下曲線」と呼ばれています。

具体的な曲線は、半径Rの円が、図 1. のようにx軸をすべることなく転がっていく場合、円周上の１点Pの軌跡を追いかけるとサイクロイドとよばれる曲線になります。この曲線は重力だけが存在する場合に最速降下曲線になることで知られています。

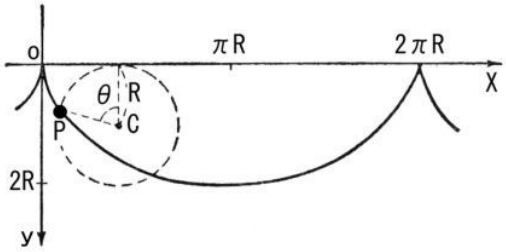

図 1.　サイクロイド曲線と屋根

そこで、この綺麗な曲線の屋根はどのような形なのかを調べて見ましょう。

この問題はベルヌーイやニュートンの時代に最速降下曲線として有名で、「決まった２点間を、終点より高い始点から始点より低い終点まで球が一番速く転がることができるような曲線は何か」というものです。

ここで求めようとしているのは屋根の形、すなわち関数 $y(x)$ です。これを変分法で求めてみましょう。変分法では、まず、極値（あるいは停留値）をとる汎関数 $I[y]$ を、ある量 $f(x,y,y')$ の積分で表現します（式(1)）。そして、 $I[y]$ が極値（あるいは停留値）を持つことと、関数 f がオイラー方程式（式(2)）を満たすことが同値であることを利用するのです。

$$I[y]=\int_0^x f[x,y,y']dx \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \qquad (2)$$

いま、雨を理想化して屋根の上を転がる質量 m の質点と考えます。さらに問題を簡単にするために以下のように仮定します

（ｉ）空気抵抗は考慮しない。

（ii）摩擦抵抗も考慮しない。

（iii）外力は重力のみとする。

質点 m の球が受ける外力は重力のみなので、図 1. のように鉛直下向きを正とします。

質点が動く微小距離を ds とすれば、

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

したがって、球の速度は

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dx}{dt}=\sqrt{1+y'^2}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad (3)$$

落ちた距離 y と速度 v との間にはエネルギー保存の法則（物理の法則が出てくるのはここだけです）が成り立ちますから

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

これより

$$v=\sqrt{2gy}$$

これを (3) に代入し、

$$dt=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

が得られます。球が屋根を通過する時間 t が積分の中身が y と y' だけの関数で表わされました。

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx \qquad (4)$$

すなわち、式(1)の関数 f は次式のようになります。

$$f = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \qquad (5)$$

この関数を使って、次式のオイラー方程式（この式の誘導は、後半のコーヒー・ブレイクのところをご覧下さい）を解けばよいわけです。

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = C \qquad (6)$$

ところが、関数 f には x が陽に含まれていないので式(6)は式(7)のように簡単に表現できます（式(7)の誘導は「お寺の屋根（その 2)」をご覧下さい）。

$$f - y'\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = C \qquad (7)$$

式(7)に式(5)を代入すると次式が得られます。

$$y\left(1+y'^2\right) = \frac{1}{2gC^2} = 2R$$

さらに式を変形すると

$$y' = \sqrt{\frac{2R-y}{y}} \qquad (8)$$

ここで

$$y = R(1-\cos\theta)$$

とおいて、両辺を微分すると次式が得られます。

$$dy = R\sin\theta d\theta = 2R\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta \qquad (9)$$

また、式(8)に y を代入すると

$$y' = \sqrt{\frac{2R-y}{y}} = \sqrt{\frac{R(1+\cos\theta)}{R(1-\cos\theta)}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

両辺に dx を掛ければ

$$dy = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}dx \qquad (10)$$

式(9)と式(10)から dy を消去すれば

$$dx = 2R\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = R(1-\cos\theta)d\theta$$

両辺を積分すると

$$x = R(\theta - \sin\theta) + C$$

が得られます。積分定数 C は初期条件として、$\theta = 0$ のとき $x = 0$ とすれば、$C = 0$ となります。

以上より、最速降下曲線が以下の表式が得られます。

$$x = R(\theta - \sin\theta) \qquad (11)$$

$$y = R(1 - \cos\theta) \qquad (12)$$

つまり、「サイクロイド曲線は重力だけが存在する場合、最速降下曲線になる」という有名な結果が得られました。

式(11)、式(12)は媒介変数 θ で表現されていますが、x と y だけの関数で表わすことができません。そこで、Excel を使って θ が 0° ～ 360° の範囲でグラフを描いたのが図 2. です。

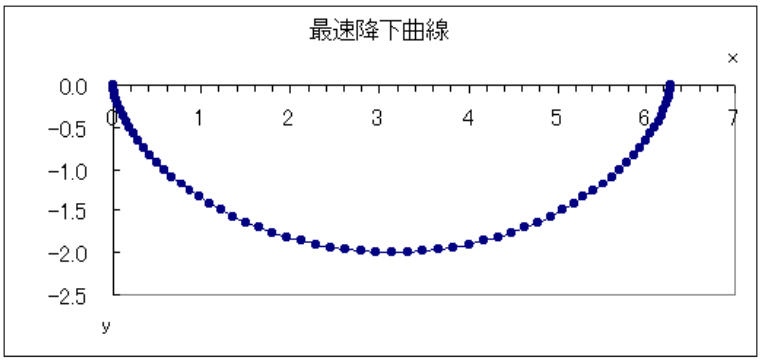

図 2.　サイクロイド曲線（0° ～360° ）

屋根の部分は− 180° ～180° の部分ですから、これを図で表わすと図 3. のようになります。

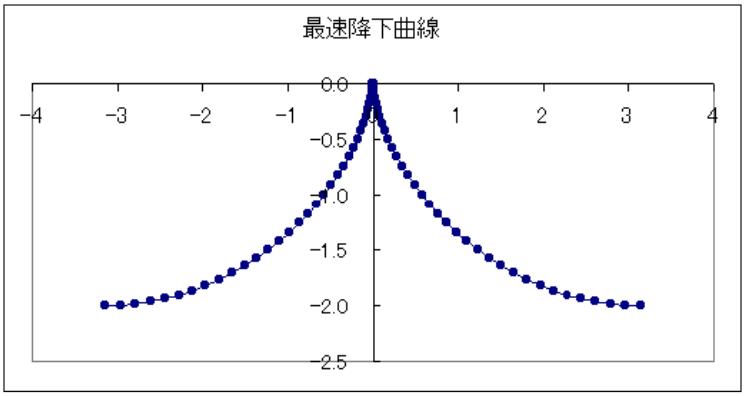

図 3.　サイクロイド曲線（−180° ～180° ）

図 3. と下の気比神宮の屋根の写真 2. とを見比べてみて下さい。確かによく似ていますね。

写真 2.　気比神宮の屋根の部分の拡大

でも、お寺や神社の屋根は本当にサイクロイド曲線なのでしょうか。私が疑問に思うのは、昔の匠がどうやってこの曲線を描いたかにあります。

実は、この問題は 1696 年、ベルヌーイが出した問題です。すなわち、「質点がある点 A からスタートして滑らかな斜面を転がり落ちるとき、最短時間で別の点 B まで辿り着くには斜面をどのような形にしたら良いだろう。」という問題です。

ニュートンがこの問題を受け取った日に、仕事帰りで疲れていたにも関わらず、一夜にして解いてしまったという話は有名です。

さて、寄棟や入母屋型の屋根はサイクロイド曲線かもしれないと書きましたが、

（1）当時の匠がサイクロイド曲線を知っていたとは思われない。

（2）屋根の先端部分で反り上がっている理由が説明できない。

などの疑問点があります。

そこで、昔匠たちが使っていた糸をたらしてものの形を決めるやり方に着目してみました。いわゆる、懸垂曲線（Catenary)といわれるものです。

ちょっと式を追ってみましょう。

いま、長さ l の糸が 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ で支えられているものとします（図 4. ）。

単位長さあたりの糸の重さを ρ とし、糸の微小距離をdsとすれば

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

したがって、糸が持つ系全体のポテンシャルエネルギーは

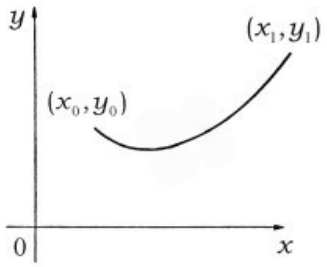

図 4.　座標軸

$$I[y] = \rho \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (13)$$

また、糸の長さを一定とすれば

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \ell \qquad (14)$$

糸が描く曲線 y を求めるには、式(14)の拘束条件のもとで、汎関数 $I[y]$ を変分法で解けばよいわけです。このような問題を等周問題と呼んでいますが、拘束条件は、この問題では本質的ではないのと式も少し複雑になるので、式(13)のみの停留条件から求めることにします。

ここでも、$I[y]$ が極値を持つことと、関数 $f = y\sqrt{1+y'^2}$ がオイラー方程式を満たすことが同値であることを利用します。

オイラーの方程式は次式で表わされます。

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (15)$$

ここで、f は

$$f = y\sqrt{1+y'^2}$$

関数 f には　が陽に含まれていないのでオイラー方程式をもっと使い易い形にします。
式(15)の両辺に y' を掛けて変形すると

$$y'\frac{\partial f}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{\partial f}{\partial y} - y''\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)' = 0$$

これより

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = C \qquad (16)$$

が得られます。ここに、C は積分定数です。

この解は容易に C_1, C_2 を積分定数として

$$y = C_1 \cosh C_2 x \qquad (17)$$

で表わされます。なお、C_1, C_2 は境界条件を代入した次式の連立方程式を解くことによって得られます。

$$y_0 = C_1 \cosh C_2 x_0$$

$$y_1 = C_1 \cosh C_2 x_1$$

さて、式（17）が求める関数 y ですが、まず懸垂曲線を示しておきましょう（図 5. ）。なあんだ、2 次関数かと思う人がいるかも知れませんが、懸垂曲線は横軸の増加とともに急激に関数値が増加するところに特徴があります。

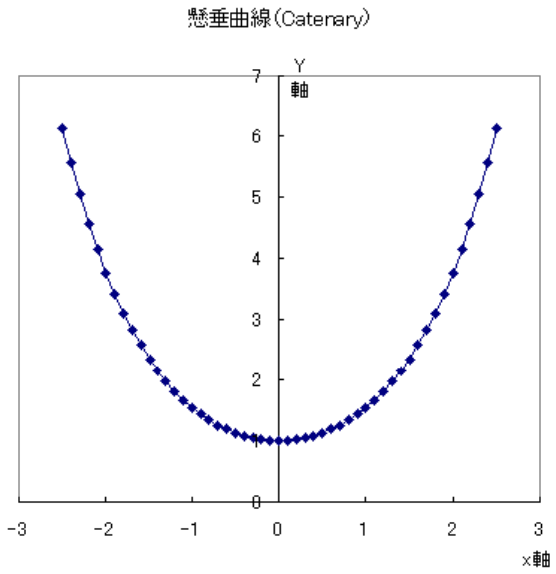

図 5.　懸垂曲線（手で糸の両端を持つと、糸はこのような形になります）

この関数を使って屋根を描いてみましょう。たとえば、図 6. にその一例を示しました。

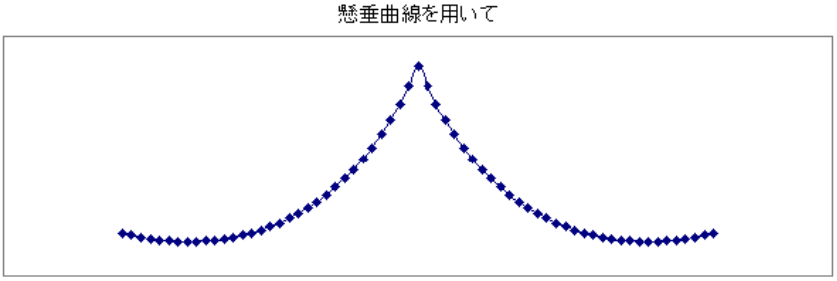

図 6.　懸垂曲線で作った屋根

気比神宮の屋根と比べてみてください。これもサイクロイド曲線屋根の形によく似ていますが、ちょっと見ただけでは「サイクロイド曲線」なのか「懸垂曲線」なのかは判りませんね。

写真 3.　気比神宮の屋根の拡大

昔は匠が屋根の形を考える場合、屋根の頂上（棟：むね）から先端（軒：のき）に糸を張り、それから得られる曲線を利用したものと思われます。これが懸垂曲線ですが、当時はそれが懸垂曲線であるということが判らぬまま使用していたのでしょう。

確かに、「屋根は雨が屋根の上にいる時間が最小になるように最速降下曲線（サイクロイド曲線）で出来ている」というのはなかなか魅力がある考えですが、当時の技術では如何にしてサイクロイド曲線を描いたか、あるいはそもそもその曲線をサイクロイド曲線として認識していたかどうかなどが不明です。

糸を使うのであれば、理論的なこと（つまり、数学的なこと）は一切知らなくても屋根を作ることはそれほど難しいとも思えません。

ということで、どちらの曲線が「お寺の屋根」に近いかといえば、「サイクロイド曲線」よりも「懸垂曲線」の可能性の方に軍配が上がるのではないでしょうか。

「お寺の屋根（前半）」では屋根を質点が転がるのにかかる時間が最小になるような関数の形を、また「お寺の屋根（後半）」では両端を支えられた糸の持つポテンシャルエネルギーが最小になるような関数の形を求めました。これら、積分で表わされた停留値問題を解くのにオイラー方程式を利用した訳ですが、ここではオイラー方程式がどのようにして導かれるかを示しておきましょう。

汎関数は式（ｉ）のように表わされます。すなわち、

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx \qquad \text{(i)}$$

そこで、$I[y]$ が停留値（極大、極小あるいは変曲点）を持つことと、 f がオイラー方程式を満たすこととが同値であることを示しましょう。

まず、関数 $y(x)$ が

$$y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

であるような関数を考えます。ただし、$\eta(x)$ は次式のように積分の両端で 0 となるような任意の関数を考えます。ε は微小量とします。

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

したがって、$y(x)$ が停留値を与えるという条件は次式で表わされます。

$$\frac{dI[y]}{d\varepsilon} = 0$$

式（ｉ）より

$$
\begin{aligned}
\frac{dI[y]}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}\right) \\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\eta'(x)\right)dx \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\eta(x)\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}dx \\
&= 0 \qquad \text{（ii）}
\end{aligned}
$$

さて、式（ii）の第1項は

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$$

より 0 になりこの項は消えます。したがって、

$$\frac{dI[y]}{d\varepsilon}=\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}dx=0 \qquad \text{(iii)}$$

が得られます。ここで、η（x）は任意の関数なので式（iii）が恒等的に 0になるためには中括弧{***}で括った部分が 0 でなければなりません。すなわち、

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

となります。これが求めるオイラー方程式です。

以上より、お寺の屋根は「サイクロイド曲線」（最速降下曲線）か「カテナリー曲線」（懸垂曲線）かと問われれば、昔は匠が屋根の形を考える場合、屋根の頂上（棟：むね）から先端（軒：のき）に糸を張り、それから得られる曲線（カテナリー曲線）を利用したものと考えたほうが現実に近いように思えるのですがどうでしょうか？