タイトル　**逆問題の考え方**
結果から原因を探る数学

著　　者　上村　豊（かみむら　ゆたか）

出 版 社　講談社（ブルーバックス）

発 売 日　2014 年 12 月 20 日

ページ数　266 ページ

原因から結果を予測するのが順問題と言われるが、それに対して、結果から原因を探るのが逆問題である。

17 世紀にニュートンが物体の運動の力と加速度による記述を発見して以来、数学は自然現象の理解に有用な言語と演繹法を提供してきた。しかし、原因から結果を導くという形で科学に貢献するのが主流であった。

ところが、古典物理で説明不可能な現象が顕在化しその限界が意識され始めた 19 世紀末頃から、数学や数理物理学の分野で逆問題の発想による研究が、散見されるようになった。そして、これらは次第に「逆問題」として括られ、その発想法は諸科学や工学の世界に広く浸透するようになった。

本書で取り扱っているプランクのエネルギー量子発見、恐竜絶滅に対するアルバレスの隕石衝突説、ストンメルの海の流れの研究、これらは全て、実は逆問題の発想によるという。現代逆問題が意識され始めたのは 20 世紀半ば以降であるし、それが受け入れられ熟成するまでには、時代に先駆した偉大な研究がそうであったのと同等の時間を要したという。

さっそく、目次を見てみよう。

第1章　逆問題と何か
/未知なるもの　/内部を探る　/逆問題の規定　/誤差に対する鋭敏性　/演算の方向
/重力探査　/積分方程式の逆問題

第2章　史上最大の逆問題
/逆問題の哲学　/衝突仮説　/地層から隕石推定　/衝撃の論文　/恐竜絶滅のクレーター探し
/チチュルブクレーターの直径　/決定的証拠

第3章　振動の逆問題
/振動と順問題　/バネの等時性　/振り子の運動　/ホイヘンスの振り子
/逆問題　/逆解析　/追加すべき観測データ　/最終解答　/からくり

第4章　プランクのエネルギー量子発見
/壮麗な逆問題　/黒体放射　/1 段目の滝、放射公式　/新たな展望
/2 段目の滝、エネルギー量子の発見　/逆問題：エネルギー要素の決定
/プランクからアインシュタインへ

第5章　海洋循環逆問題
/海洋学と逆問題　/コリオリの力と地衡流　/地衡流と運動方程式
/地衡流の力学計算　/基準速度を決定する逆問題　/逆解析の原理
/逆のパス

第6章　逆問題としての連立 1 次方程式
/最小 2 乗解　/過剰決定系・不足決定系　/最小 2 乗解の方程式
/長さ最小の 2 乗解　/ムーアーペンローズ逆行列　/特異値分解

第7章　逆問題のジレンマ
/正規化法　/クイズ　/チホノフ正規化解　/特異値分解とチホノフ正規化
/積分方程式の不安定性　/逆問題源流探訪　/放射性物質逆問題の正規化解

第8章　量子散乱の逆問題
/量子力学速成コース　/シュレディンガー　/量子散乱　/ハイゼンベルグの S 行列
/散乱の逆問題　/逆スペクトル問題　/非線形波動

参考文献および注釈

本書は、ブルーバックスとしては珍しく、数式がふんだんに使われており、文章だけから想像を膨らませて考えるよりも数式を追う方が判り易い。特に工学、理学、医学などで実務に携わっている学生や研究者などにはもってこいの書である。

さて、本書で記されている問題はどれをとっても面白いが、ここでは二つばかり紹介しておこう。

まず最初は、第 6 章の「逆問題としての連立 1 次方程式」である。連立 1 次方程式も、

未知数が直接観測できない場合には逆問題である。ここではシンプルな電気抵抗の例を挙げて説明している。

電気抵抗は、日常的な温度の範囲では、温度と１次関係にある。

$$R = R_0(1 + \alpha t) \qquad (1)$$

式（1）の係数のα（温度係数）とR_0が判っていれば、温度tの時の電気抵抗Rが判る。これは順問題である。実際には、使用する導線のαやR_0を初めに決定しておく必要がある。

実験により２つの温度t_1、t_2における抵抗を測定し、それをR_1、R_2とすれば、式は単なる連立１次方程式である。

簡単のために$x = R_0$、$y = R_0\alpha$とすれば

$$\begin{cases} x + t_1 y = R_1 \\ x + t_2 y = R_2 \end{cases}$$

となる。

だが、逆問題としてのもとの目的から考えると、奇妙なこともある。すなわち、もう 1 つ別の温度t_3における抵抗の値を測定してもう１つの式

$$R_3 = R_0(1 + \alpha t_3) \quad \text{すなわち、} \quad x + t_3 y = R_3$$

が得られたとしよう。今度は未知数 2 個で方程式 3 個の連立方程式だ。よほどの奇蹟でも起きない限り、この方程式には解がない。

$$\begin{cases} x + t_1 y = R_1 \\ x + t_2 y = R_2 \\ x + t_3 y = R_3 \end{cases} \qquad (2)$$

これでは解けないから「そんな結果はいらない。余計なことはするな」では、常識的に考えても馬鹿げている。労力を掛ければ良い結果が得られるはずなのに、解が無くなるからといって捨てて良いはずがない。

さあ、どうするか！　一般には厳密解がないのだから、解の概念を広げる必要がある。そのため、まず式（2）が

$$(x + t_1 y - R_1)^2 + (x + t_2 y - R_2)^2 + (x + t_3 y - R_3)^2 = 0 \qquad (3)$$

と同値であることに注意する。そして、式（3）の左辺を最小にする x 、y を解とするのである。

すなわち、ゼロ（0）にならないのなら最小で良いというのだから随分アバウトな解決法である。時として、このような自由で大胆な発想が学問の進歩に繋がる。

これは、何点かの観測データを全体像として、関数の（α や R_0 のような）パラメータという要素を定める問題だから、逆問題の一種なのである。

この後、最小二乗法の話に発展し、過剰決定系・不足決定系へと話が飛んでいき、最小 2 乗解の方程式の一般解へと進む。・・・・・。

第 2 章の、「史上最大の逆問題」も興味深くて面白い。恐竜絶滅原因究明の歴史は長い。「生物の種としての寿命説」、「気候変動とりわけ寒冷化によって徐々に個体数が減ったとする説」、「火山噴火説」、「隕石衝突説」など、様々な説が唱えられてきた。

しかし、ダーウィンの進化論の影響もあって、1850 年頃からは「漸進説」が「激変説」に対して優位に立っていた。

荒唐無稽と思われていた「隕石衝突説」に急浮上のきっかけを与えたのは、1980 年 6 月に「サイエンス」に発表された論文「白亜・第三紀絶滅の地球外原因」であった。著者は、L・アルバレス、W・アルバレス（前者の息子）、F・アサロ、H・ミッシェルの 4 名である。L・アルバレスは、1968 年に素粒子分野への貢献によりノーベル物理学賞を受賞している。

P49 に論文の要約がある。著者は、「本論文について登場する科学種も半端でない。まさに科学のデパートだ。物理、化学、地学、生物である。生物学は過去を訪ねる古生物学だ。論文の中では、天文学も海洋学、さらには火山の噴火も登場する」と絶賛する。

ここでは、イリジウムは、宇宙で豊富であるのに比して、地球の殻では枯渇していることに着目し、このイリジウムが地球外由来によると考え、地球に巨大な小惑星が衝突したという仮説を立てる。そして結論は、この仮説に基づく小惑星直径の推定値、6.6km、10km、7.5km、14km を論文の最後に提示している。この 4 つのうち、逆解析すなわち逆問題の解析の感じが最も現れているのは、直径 6.6km をはじき出した方法だという。

衝突仮説の後、地層からの隕石推定、と続き当時、候補となるクレーターは 3 つだけだったが、そのうちの 2 つは直径が 140km で、しかも先カンブリア時代のもので古すぎる。もう 1 つは直径 100km と小さすぎた。したがって、この逆問題は未解決問題として厳然と残った。そのことが隕石衝突説の最大の弱点だった。

この後は、衝突小惑星の直径あるいはその小惑星の残した K-T 境界地層の痕跡から、そのクレーターの位置を特定することであった。

1991 年 9 月、学術誌「Geology」に「チチュルブクレーター：メキシコ・ユカタン半島

上の K-T 境界とおぼしき衝突クレーター」、著者は A・ヒルデブランド他 6 名。メキシコのユカタン半島に埋没している直径 180km の環状構造は衝突クレーターであった。そのサイズおよび形状は、その周辺で掘削された石油井戸および磁気異常・重力場異常によって明らかにされていた。メキシコの石油公団は 1940 年代に重力探査を開始し、重力異常を発見している。

K-T 境界とは、「中生代」と「新生代」の境目を意味する。すなわち、「中生代」最後の「白亜紀」と「新生代」最初の「第 3 紀」の頭文字をとっている。「白亜紀」は英語で Cretaceous だから頭文字をとって C としたいところだが、C で始まる地質年代区分が多いためドイツ語の Kreide から K をとっている。一方「第 3 紀」は英語で Tertiary から T をとり K-T 境界としている。

さて論文では、クレーターの直径は 180km と推定された。これは等高線表示の重力分布図から得られた。「現象から自然の声を聴く」というのが逆問題の哲学だ。

チチュルブクレーター論文は、重力・磁気データの項でクレーターの直径推定を行った後に層序学、岩石学からの考察を行い、次のように断言する。「これらの地球物理学的、層序学的、岩石学的証拠は埋没した衝突クレーターの存在を強く示すものと信ずる」。ここまでは力強い。

ところが、クレーターと K-T 境界の恐竜絶滅につなげる論証は、これに比べると、少しトーンダウンする。アルバレスらの衝撃の論文に比べると完成度は落ちるが、この論文には、それを補う迫力があると著者は言う。L・アルバレスは、絶滅のクレーターの発見を知ることなく、1988 年に亡くなっている。

チチュルブクレーター論文の最後に、この論文のレフリーコメントが載っている。「提案する。長い間探されていた K-T クレーター、the smoking gun（決定的証拠）を」という言葉で第 2 章を閉じている。

参考文献および注釈には、各章ごとに文献がまとめられている。さらに深入りしたい読者のために論文のタイトルはイタリックで記されており見つけやすい。

本書を読み終えると、「要するに、細部から全体を調べるのが順問題で、全体から細部を探るのが逆問題だ」ということに気付く。それでいいのだろうか？

東京大学教養学部では、学生が自主的に教員を評定し小冊子を編纂している。学生が教員を評価するので「逆評定」というわけである。ある年、冊子に、上村先生の授業は 1/3 がギャグだと書かれた。けしからん。1/3 とは何だ。1/4 以内に収まっているぞ。と憤慨するくらい本書でも（おやじ）ギャグを乱発し、読者を混乱に陥れる。

2015．1．26