カオスとマイマイガ

マイマイガ（♂）　昆虫（小学館図鑑より）

　最近、面白い本を見つけました。「数学の遺伝子」、著者は小島寛之氏。副題も「５本の指から始まる壮大な物語」とあります。全体に面白いのですが、ここではその中の一部の「マイマイガの発生メカニズム｝について紹介しよう。

　「マイマイガ」とはどんな蛾なのでしょうか。幼虫は典型的なケムシで、背面には目立つ二列の点が並んでいます。この点の色は個体にもよりますが頭寄りの 5 対のみ青で、それ以降の 6 対は赤くなるものが多い。
　成長すると体長は 60㎜ ほどになり、糸を吐いて木からぶら下がっている様子から、別名「ブランコケムシ」と呼ばれており、風に吹かれてかなり広域を移動することで知られている。
　オスは活動的で、日中は森の中を活発に（目まぐるしく）飛び回ります。和名の「マイマイガ」はオスのこの性質に由来していると言われています。これとは対照的に、メスは木の幹などに止まってじっとしており、ほとんど飛ぶことはない。オスは「茶褐色」、メスは白色」で、大きさも異なりオスは体長 20㎜ から 50㎜ 程度なのに対して、メスは 50㎜ から大きな個体では 100㎜ ほどにもなる。

　第二次大戦後、ニューヨーク州のロングアイランドでは、住民が国と州を相手どって DDT の空中散布に反対して訴訟を起こしました。散布の目的は樹木の害虫マイマイガの駆除でしたが、樹木のない市街地、牧場にまで広範囲に散布したため、家畜が具合悪くなったり、養魚場の魚が死ぬといった被害が出ていました。この訴えは最終的には、薬剤散布と環境汚染との関係を証明する科学的根拠を住民側が提出できなかったのを理由に却下されます。この事件が後のレイチェル・カーソンの「沈黙の春」へと繋がっていきます。

　さて、文章の一部を少し紹介しておきましょう。「・・・カオス現象が劇的に単純な形で見つけられたのは、1970 年代のことである。蛾の一種であるマイマイガの発生をシミュレートするロジスティック関数というのがある。現在の個体数が x のときの次世代の個体数を $f(x)$ とするとき、次のような式で計算

すると、現実をよく模倣できることが知られて」いるのである。

$$f(x) = \lambda x(1-x) \quad (ただし、0 \le x \le 1) \quad (1)$$

これは、蛾の繁殖を単純化したモデルである。「いったん λ 倍 の λx だけ幼虫が生まれるが、多くなりすぎると生存環境が悪化することで、$(1-x)$ だけの割合しか生き延びられなくなり、結局次世代の個体数は $\lambda x(1-x)$ となる」とあります。

このあと、数値計算が続きますが、まずここまでのところを理解しておきましょう。

式（１）は、「ある数 x がある。これを簡単な式に代入し、コンピュータで処理する。出された解を、再び x として方程式に代入する。こうした演算を繰り返せば、万人の前にカオスが現れる」という情報が含まれるというのです。

式（１）を見ると、何の変哲もない二次式です。この式に何が隠されているのでしょうか。カオスとは一体何者でしょうか。

まず、最初の疑問点です。

１．式（１）で、蝶の食物連鎖でも述べたような仕組みを表すことが出来るのでしょうか。
２．式（１）の x の範囲のように、単純化できるのでしょうか。
３．式（１）の λ にはどんな意味があるのでしょうか。

の三点です。

式（１）を眺めていると、なかなか良く出来ていることに気がつきました。

まず、１．については以下の通りです。

この式は x が 0.5 を境に増えたり、減ったりしています。しかも x の範囲は０と１の間だけです。さらに式を眺めていると、「増えすぎたら、減らしなさい。減りすぎたら、増やしなさい」というフィードバック機構であることが

わかります。

つまり、$f(x)=\lambda x$ であれば、子供の数は親の数に比例するわけだから、λ は子供の数は親の何倍になるか、つまり繁殖力を示している。ところが、親の数が多いと、餌の植物を食べつくしてしまうので子供の代では数が減る。したがって、食糧の量は１－ x で表わし、子供の代では $f(x)=\lambda x(1-x)$ で表わされるというわけです。こんな風に言ってしまうと、じゃあ子供と親の餌の奪い合いではないかと誤解されそうですが、$1-x$ の部分は捕食される項であると考えたほうが良いかも知れません。

つまり、マイマイガが増えすぎると、食糧不足や病気などでフィードバック機構が働いて、その数を減らす方向に、また減りすぎるとまたフィードバック機構が、今度は増やす方向働くというわけです。うまく考えてますね。

２.は、簡単ですね。たとえば、変数範囲が $a_1 \le x \le a_2$ であれば、$X=\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}$ と置き換えれば、よいわけです。　このように置き換えることにより、Xは、０≦ X≦１となり問題解決です。したがって、式（１）のままで議論が進められますね。

３．はどうでしょうか、

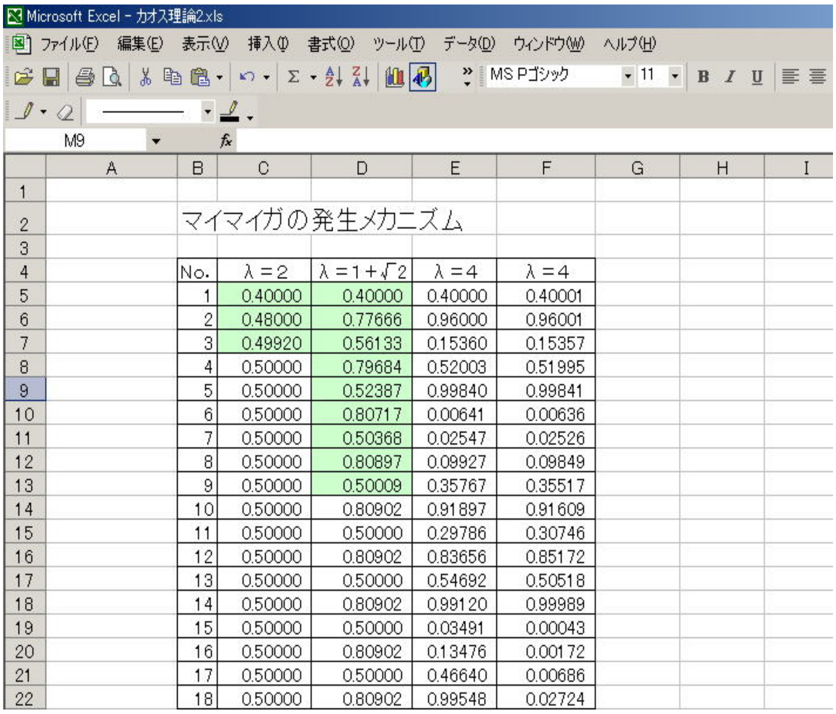
式（１）を変形すると、以下の通りです。

$$x_{n+1}=\lambda x_n(1-x_n) \quad (1')$$

x_n はマイマイガの分布、添え字　n は次々に現れる世代を表し、n 番目の世代に親が λx 匹の卵を産みます。次の世代の分布は、λx_n になります。式中には $(1-x_n)$ という因子が掛けられていますが、これは分布密度を適正な値に保つフィードバックを表しています。

後残ったのは、「カオスとは何か」と「数値計算」のみです。まず何はともあれ、カオスの存在を知るために、式（1’）の数値実験をやってみましょう。

式（1’）は、逐次ループなので計算は簡単です。BASIC、VISUAL　BASIC、FORTRAN などどれでも計算可能ですが、今回はプログラミングの不要な Excel を使ってみましょう。Excel での計算結果の一例を以下に示します。



マイマイガの発生メカニズム

No.	λ＝2	λ＝1＋√2	λ＝4	λ＝4
1	0.40000	0.40000	0.40000	0.40001
2	0.48000	0.77666	0.96000	0.96001
3	0.49920	0.56133	0.15360	0.15357
4	0.50000	0.79684	0.52003	0.51995
5	0.50000	0.52387	0.99840	0.99841
6	0.50000	0.80717	0.00641	0.00636
7	0.50000	0.50368	0.02547	0.02526
8	0.50000	0.80897	0.09927	0.09849
9	0.50000	0.50009	0.35767	0.35517
10	0.50000	0.80902	0.91897	0.91609
11	0.50000	0.50000	0.29786	0.30746
12	0.50000	0.80902	0.83656	0.85172
13	0.50000	0.50000	0.54692	0.50518
14	0.50000	0.80902	0.99120	0.99989
15	0.50000	0.50000	0.03491	0.00043
16	0.50000	0.80902	0.13476	0.00172
17	0.50000	0.50000	0.46640	0.00686
18	0.50000	0.80902	0.99548	0.02724

数値だけでは、はっきり傾向が掴めないので、λ の値と初期値を変えて計算し、これらを図で示しておきましょう。ただし、λ は１～４まで、初期値を色々変えて様子を見て見ましょう。

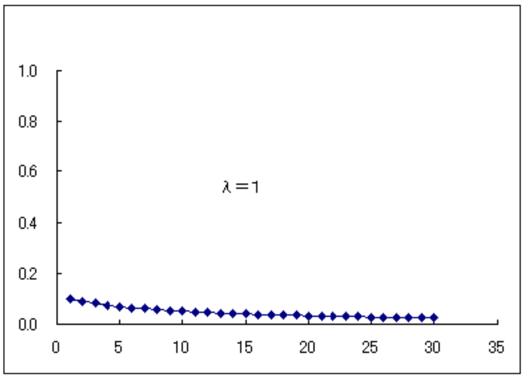


図１． λ の値による変化

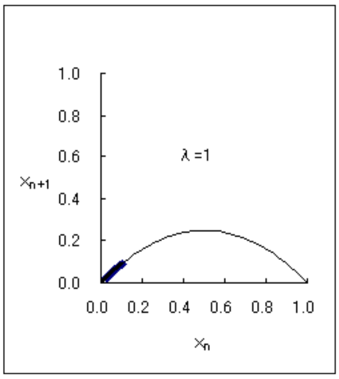


図２． x_n と x_{n+1} との関係

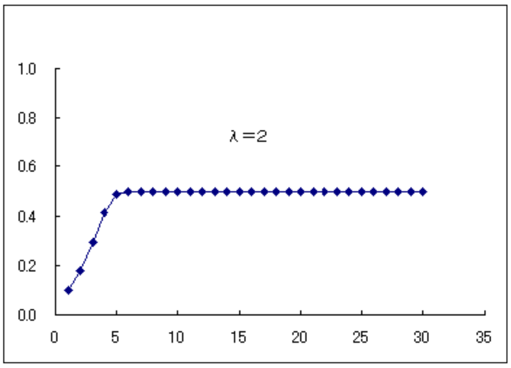


図３．λ の値による変化

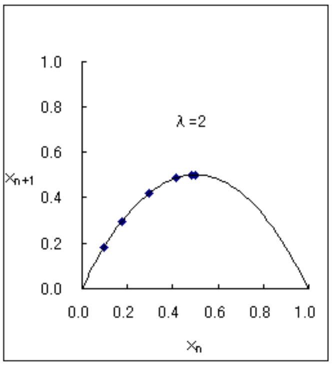


図４． x_n と x_{n+1} との関係

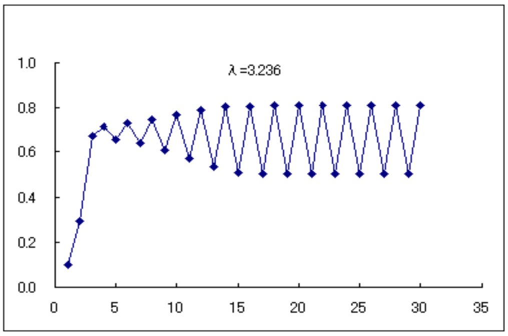


図５．λ の値による変化

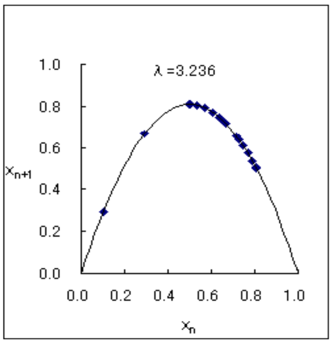


図６． x_n と x_{n+1} との関係

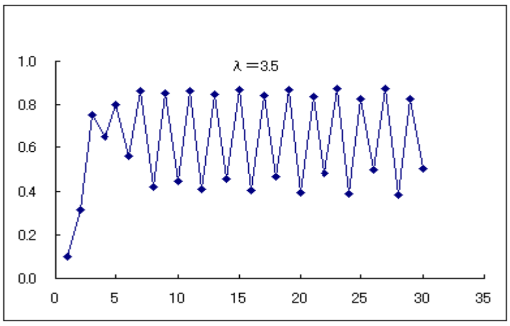


図７． λ の値による変化

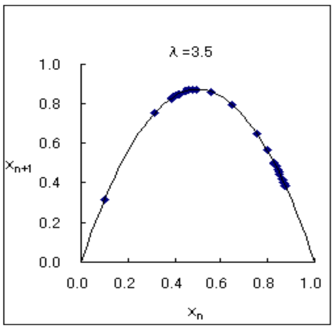
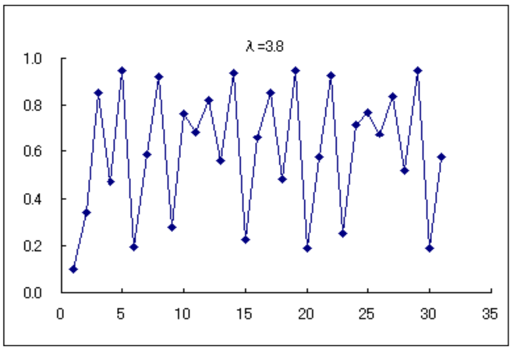


図 8． x_n と x_{n+1} との関係



図．９ λ の値による変化

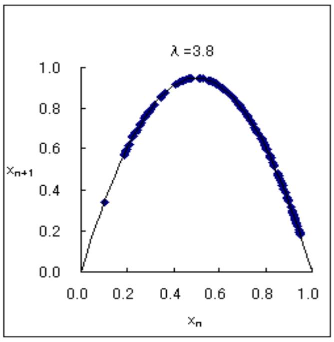


図 10． x_n と x_{n+1} との関係

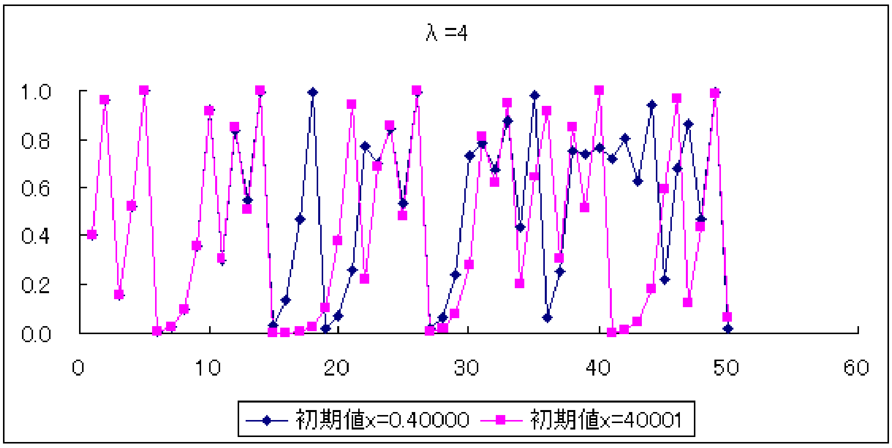


図 11.　 λ の値による変化

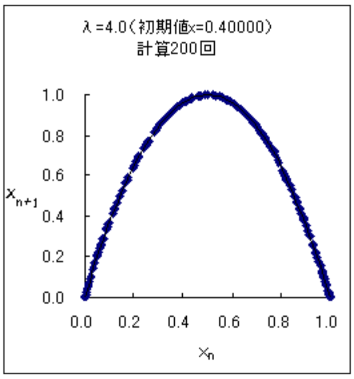


図 12.　 x_n と x_{n+1} との関係

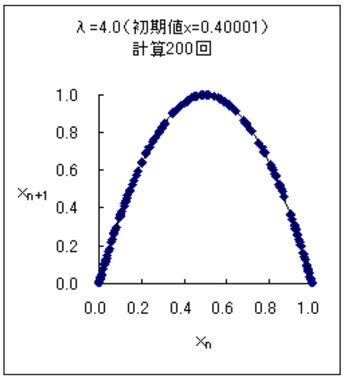


図 13.　 x_n と x_{n+1} との関係

これらを、大雑把にまとめると、

１．　λ が１より小さい場合、分布はゼロへと減少していきます。

２．　λ が１より大きく、３より小さい場合は、分布は一定値になります。

３．　λ が３を超えると、密度が大きくなれば　x　は減少し、密度が小さくなれば　x　は増加します。

４．λ がさらに大きくなると、分布状態が複雑に変動し、さらに大きくなると、カオス状態になります。

これらを個別に見てみましょう。

たとえば、図３．の λ=2 の場合は、Xは初期値から直ぐにある一定の値(x=0.5)近づきます。いったんこの値になれば、そのままこの値に留まります。フィードバックが効きすぎて、x_n が収束するならば、$x_n = x_{n+1}$ の解になってはずですから、$x = 2x(1-x)$　したがって、$x(2x-1) = 0$　となります。$x = 0$ は解ではありませんから　$x = 0.5$ となり予想通りの解が得られます。

図５．では、λ の値の $1+\sqrt{5}=3.236$ は無作為に取った数値ではありません。図からも判るように、最初多少の振れはありますが、ついには二つの数値が交互に出現しています。カオス理論では、これらの点をアトラクター（つまり吸引子）と呼んでいます。

これらはフィードバックが強い例です。この図は、増えすぎたマイマイガが、次の時期に死滅することによって減少します。しかし、少なくなりすぎると、次の時期にはまた増える。といったことを繰り返すというように、自然の姿を模写しているというわけです。ただ、モデルとしては面白いのですが、規則性があるということから、自然界で見られる実際の状況とは異なっています。

図 11．の λ=4 の場合はどうでしょう。今度は前の例と違って、一定のパターンを持っていません。計算に間違いがあったのではないかと最初は疑いましたが、間違いありません。出てくる値同士に、全く脈絡がないような振舞いです。何時まで経っても同じようなパターンが現れてきません。50 項以上を続けて計算しましたが、結果はずっとこんな調子で続きます。頻度分布のところでは 200 項まで計算していますので参考にして下さい。

モデルがこれほど簡単なのに、結果は全く複雑な振舞いを見せています。これこそカオスに他ならないわけです。以上の例は、フィードバックに強弱を与えて、その挙動を見たわけですが、λ の値によって結果が大きく変わることがわかります。

図 11.には初期値を変えた場合どうなるかを、フィードバックが弱い λ＝4 について検討したものです。初期値は x = 4.00000 と x = 4.0001 の場合の比較です。まず、この計算の結果はほとんど変わらないだろうと考えられましたが、結果は予想に反して、図でも見て判る通り、両者の差異はどんどん大きくなっていきます。この予測できない事態が、カオスの特徴なのです。

図１．～図１３．には、左に時系列、右にピーク値がとった 2 次曲線上の点を表示していますが、これを見方を変えて横軸前方から眺めてみましょう。すなわち、ピーク値の度数分布を求めてみようというわけです(図 14．～図 17)。このように見る位置を変えることによって、様子がもっと良く判ってきます。なお、以下の頻度分布は、計算回数を 200 回に増やして求めたものです。なお、横軸はグラフを小さくすると横軸の値を書くのが難しいため、1 から 1.0 までの数値は、1（0.00～0.10）、2（0.11～0.20）、3（0.21～0.30）、・・・、10（0.91～1.00）のようになっています（図 18．参照）。

$\lambda = 4$ の場合(図 16．、図 17．）のように、フィードバックが弱い系では、フィードバックがかかり難く、ピーク値が０や１を取る頻度が上がりますが、しかし、これを除けば全体的にはホワイトノイズのように、均等に分布しています。つまり、全くランダムな分布となります。

実際のマイマイガの経年変化も、フィールドで経験するように年毎に大きく異なります。私がよく訪れるフィールドに池河内湿原があります。ここの昆虫達を長年追いかけていますが、ある種の蝶や蛾の生息数は、年とともに大きく変化します。

最近の例では、3 年ほど前にクスサンの幼虫が異常繁殖したことがありました。それは大変な量で、舗装道路を歩いていても木の上からぼたぼたと落ちてくるし、舗装道路も幼虫の絨毯のようで、歩くのが大変なくらいです。車で通る場合は轢いて通らないと無理なくらいの数です。

また、2005 年にはキアシドクガの成虫が山の樹木を白い点で埋め尽くすほど大量発生し、池河内で農業を営んでいる集落の人たちが「今年は蝶が異常に多いね」と勘違いした位です。

私達虫を追いかけている者の間でこのような情報を共有することはあまりありませんが、上記クスサンの幼虫の大量発生やキアシドクガの成虫の異常発生を見ると、これはまさに「カオスだなあ」と納得してしまいます。

皆さんも、$3.5 \leqq \lambda \leqq 3.9$ あたりの計算を自分でやってみて下さい。結構面白い結果が出てきます。これらの結果を見ていると、自然界は、フィードバックが比較的弱い系に近いということがよく判ります。

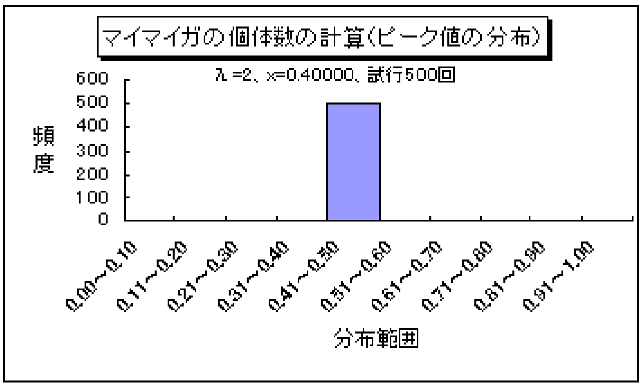


図 14．ピーク値の分布（フィードバックの強い $\lambda=2$、初期値は $x=0.40000$）

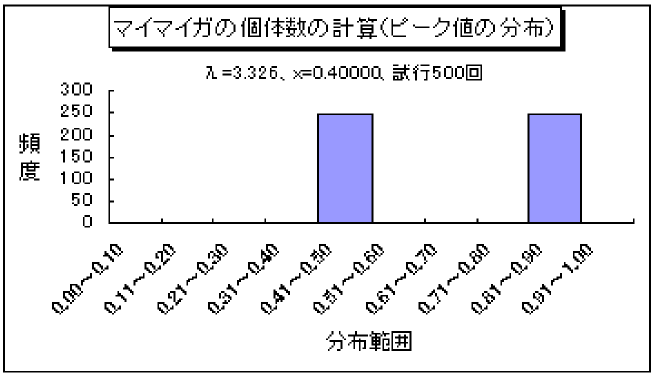


図 15. ピーク値の分布（フィードバックの強い λ=3.326、初期値 x=0.40000）

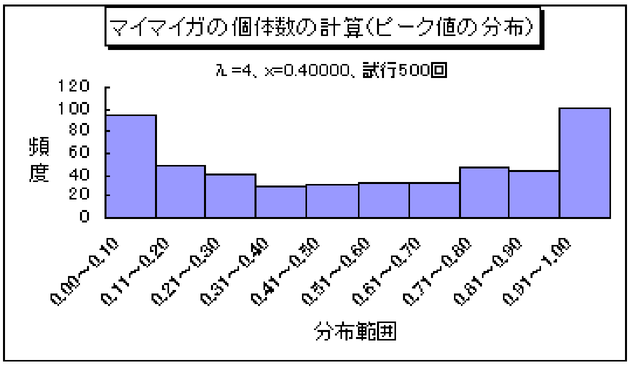


図 16. ピーク値の分布（フィードバックの弱い λ=4、初期値 x=0.40000）

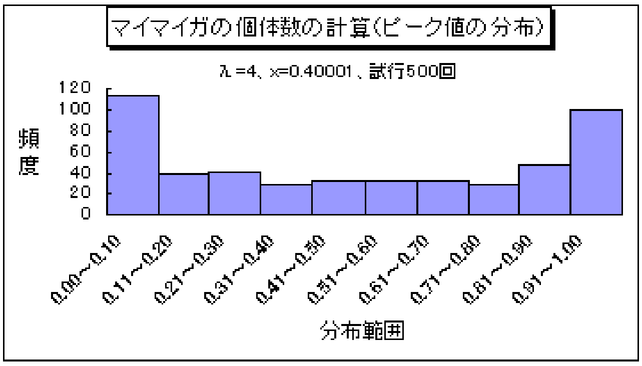


図 17. ピーク値の分布（フィードバックの弱い λ=4、初期値 x=0.40001）

さて、以上の例で面白いなと思ったのは、一般に、数学というのは論理的に得られるものであって、実験結果として得られるものではないと私たちは思っていたことです。ところが最近はそうではなくなってきたようです。

コンピュータは、数学の実験的側面を大きく発展させているようです。特に、上の例のように、コンピュータは逐次計算が得意で、何百万～何千万回という繰り返し計算など朝飯前です。これによって、私たちは、予測もしていなかっ

たような面白い結果に遭遇するという僥倖にめぐり合えることが出来るかも知れません。

　ラプラスは 19 世紀初頭、ニュートンが描いた宇宙の成り立ちを信じて、いかなる粒子も、初期値さえ判れば、その挙動の全てを正確に予言することが出来ると主張しました。このような能力を持った悪魔を「ラプラスの悪魔」と呼びましたが、統計力学とエントロピーの誕生で個々の分子の運動を初期値までさかのぼってたどることが出来なくなりました。
　また、運動の厳密な予測も量子力学の不確定性原理によって打ち砕かれました。真理はただ一つなのではなく、総体が持つ多様な断面の一つであるのかも知れません。

　計算で実際に現れるものとして、初期値設定の数値をちょっと変えるだけで、気象図の姿が途中から大きくずれてしまう時があります。僅かな違いしかないような温度・気圧・風向から計算をスタートさせた二つの気象が、ちょうど図 11. でも見られたように、あまり長い時間を経ないうちに、劇的に大きく異なる状態に分かれてしまうという計算結果が得られています。初期値のほんの僅かな違いが、大きな結果の違いを生むというのです。これには、「バタフライ効果」という渾名がついていて、「北京で蝶が羽ばたくと、ニューヨークで嵐が起こる」というたとえ話にまでなっています。
　図１１. などを眺めていると、人の人生を表わしているようで、複雑な気持ちになります。
　ただ、時々「今年は何時もの年よりギフチョウが少ないな」などとひとり言をいっている自分を発見することがありますが、図１１. のような図に出くわすと「これだ！」と合点がいったように思うこともありますが、ここで示されたマイマイガの生態モデルなどは、実験的な根拠が薄いモデルなので、それが表わす現実に対しては玩具といえるほどの代物であることも確かです。

　極めて複雑な状況を予測するのに、私たちが信奉する還元論には限界があることが判っています。コンピュータの大容量化がカオス理論の活躍の場を益々広げています。
　宇宙は物質現象だけでは完結しないのでしょうか。カオスは自然界における秩序をつかさどっているのでしょうか。また、カオスは生物の分野にも新しい生命を吹き込んでくれるのでしょうか。
　原理的に数値化に馴染むとは限らない現象にまでカオスを無批判に、楽天的

に適用するのは、注意が必要ですが、何か途方もないことが起こっているのでしょうか。なんだかワクワクしてきます。

2004．3．14